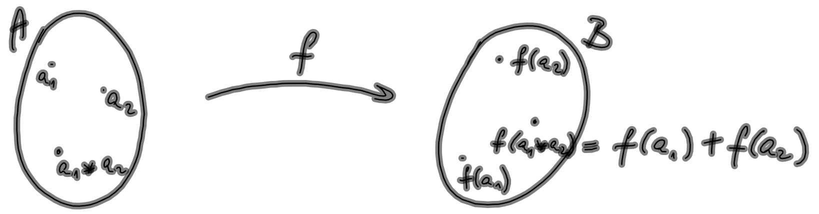
HOMOMORFISMY

Definice Buďte $(A,*)$, $(B,+)$ pologrupy. Zobrazení $f: A \to B$ se nazývá HOMOMORFISMUS POLOGRUP, jestliže $\forall a_1, a_2 \in A$ platí

$$f(a_1 * a_2) = f(a_1) + f(a_2).$$

Značíme $f: (A,*) \longrightarrow (B,+)$.



Buďte $(A,*,e_A)$, $(B,+,e_B)$ monoidy. Zobrazení $f: A \to B$ se nazývá HOMOMORFISMUS MONOIDŮ, jestliže je homomorfismus pologrup $(A,*) \longrightarrow (B,+)$ a platí $f(e_A) = e_B$

Buďte $(A,*,e_A,{}^{-1})$, $(B,+,e_B,{}^{-1})$ grupy. Zobrazení $f: A \to B$ se nazývá HOMOMORFISMUS GRUP, jestliže je homomorfismus monoidů $(A,*,e_A) \to (B,+,e_B)$ a $\forall a \in A$ platí

$$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}.$$

Značíme $f: (A,*,e_A,{}^{-1}) \longrightarrow (B,+,e_B,{}^{-1})$.

Př.: $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$.

$$(\mathbb{Z},+,0,-) \longrightarrow (\mathbb{Z},+,0,-)$$

$$f(m+n) = 2(m+n) = 2m + 2n$$

$$f(m) + f(n) = 2m + 2n$$

$$f(0) = 0$$

Tvrzení: Buďte $f: A \to B$ a $g: B \to C$ homomorfismy pologrup (monoidů, grup). Pak jejich složení $g \circ f: A \to C$ je homomorfismus pologrup (monoidů, grup).

Důkaz: Buďte $f: (A, *) \to (B, +)$, $g: (B, +) \to (C, \ddagger)$ homomorfismy pologrup.

$\forall a_1, a_2 \in A: \quad f(a_1 * a_2) = f(a_1) + f(a_2)$

$\forall b_1, b_2 \in B: \quad g(b_1 + b_2) = g(b_1) \ddagger g(b_2)$

$$(g \circ f)(a_1 * a_2) = g(f(a_1 * a_2)) = g(f(a_1) + f(a_2)) =$$

$$= g(f(a_1)) \ddagger g(f(a_2)) =$$

$$= (g \circ f)(a_1) \ddagger (g \circ f)(a_2).$$

Monoidy: $f(e_A) = e_B$, $g(e_B) = e_C$.

$(g \circ f)(e_A) = g(f(e_A)) = g(e_B) = e_C$.

Grupy: $\forall a \in A: f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

$\forall b \in B: g(b^{-1}) = g(b)^{-1}$

$$(g \circ f)(a^{-1}) \overset{?}{=} ((g \circ f)(a))^{-1}$$

$$= g(f(a^{-1})) = g((f(a))^{-1}) = (g(f(a)))^{-1} =$$

$$= ((g \circ f)(a))^{-1}$$

<u>Tvrzení</u> Buďte $(A, *, e_A, ^{-1}), (B, +, e_B, ^{-1})$ grupy. Buď $f: A \to B$ homomorfismus pologrup: $(A,*) \to (B,+)$. Pak f je homomorfismus grup: $(A,*,e_A,^{-1}) \to (B,+,e_B,^{-1})$.

<u>Důkaz</u> a)
$$f(e_A) = f(e_A * e_A) = f(e_A) + f(e_A)$$
$$f(e_A) + (f(e_A))^{-1} = f(e_A) + f(e_A) + (f(e_A))^{-1}$$
$$e_B = f(e_A) + e_B = f(e_A)$$

b)
$$f(a) + f(a^{-1}) = f(a * a^{-1}) = f(e_A) = e_B$$
$$\Rightarrow (f(a))^{-1} = f(a^{-1}).$$

IZOMORFISMY

Definice IZOMORFISMUS pologrup (monoidů, grup) A, B je homomorfismus $f: A \to B$ pologrup (monoidů, grup), který je bijektivní.

Tvrzení Buď $f: A \to B$ izomorfismus pologrup (monoidů, grup). Pak $f^{-1}: B \to A$ je izomorfismus pologrup (monoidů, grup).

Důkaz Pologrupy $(A, *)$, $(B, +)$.

Potřebujeme ukázat, že $f^{-1}(b_1+b_2) = f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2)$

f je injekce:

$$f(f^{-1}(b_1+b_2)) = f(f^{-1}(b_1) * f^{-1}(b_2))$$

$$b_1+b_2 = f(f^{-1}(b_1)) + f(f^{-1}(b_2)) = b_1+b_2$$

f^{-1} je bijekce $\Rightarrow$ f^{-1} je izomorfismus.

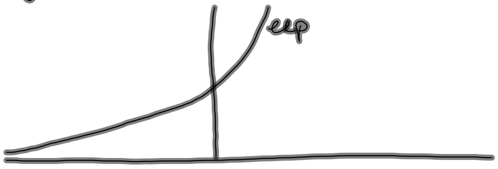
Př.: 1) identita

2) $\mathbb{R}_{>0} := \{ r \in \mathbb{R} \mid r > 0 \}$

$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot, 1, {}^{-1})$, $(\mathbb{R}, +, 0, -)$

$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto e^x$ je homomorfismus grup.

$\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = \exp(x) \cdot \exp(y)$.



Definice Říkáme, že pologrupy (monoidy, grupy) A, B jsou IZOMORFNÍ, jestliže existuje izomorfismus $A \to B$. Zapisujeme $A \cong B$.

Tvrzení Pro pologrupy (monoidy, grupy) A, B, C platí

(i) $A \cong A$

(ii) $A \cong B \Rightarrow B \cong A$

(iii) $A \cong B$, $B \cong C \Rightarrow A \cong C$.